**Calculating Ground-State-Energy of by using**

**Fragment molecular orbital-based Varational Quantum Eigensolver**

**Abstract**

VQE(Variational Quantum Eigensolver)는 바닥 상태의 에너지를 계산하는 양자 컴퓨터 알고리즘으로 신약/배터리 개발 분야 등 신소재 개발분야에 효과적일 것으로 많은 기대를 받고 있다. 그러나 현재의 양자 컴퓨터는 사용할 수 있는 큐비트의 수가 제한적이어서, 산업에 사용되는 분자에 대한 VQE의 적용은 한계를 지닌다. 이를 해결하기 위해 본 연구에서는 FMO/VQE를 사용하는 방안을 제시한다. FMO(Fragment Molecular Orbital) 방식은 전체 시스템을 작은 조각으로 나누어 처리하는 방식이다. 그리고 FMO/VQE는 FMO방식을 VQE에 적용한 방법이다[1] 본 연구에서는 FMO/VQE 의 효용성을 보이기 위해 이차 전지의 양극재로 사용되는의 바닥 상태 에너지를 FMO/VQE를 사용하여 계산하였다. 이를 통해 기존의 VQE알고리즘에서 필요했던 큐비트의 개수를 24개에서 최대 14개로 줄일 수 있었다. 그럼에도 불구하고 고전적 방식에 의한 결과와 거의 동일한(99.989%의) 정확도를 얻을 수 있었다. 본 연구는, 제안되어진 VQE 알고리즘을 통해, 배터리/신약개발분야에서도 VQE 알고리즘을 성공적으로 적용할 수 있음을 보여준다.

**1.Introduction.**

분자의 바닥 상태와 그때의 에너지는 분자가 가질 수 있는 가장 안정적인 상태와 가장 낮은 에너지이다. 이를 알고 있으면 분자 사이의 결합이나 분자의 구조를 알 수 있어 신약 개발이나 새로운 이차전지 양극재 개발등 각종 화학 연구 분야에 활용할 수 있다. 현재의 분자의 바닥 상태 에너지는 대부분 고전적인 컴퓨터에서 계산되고 있다. 하지만 분자를 구성하는 원자의 수가 증가하거나 분자를 구성하는 원자의 원자 번호가 크면 고려해야 할 입자의 수가 많아지고 고려해야 할 각 입자의 상호작용이 기하급수적으로 많아진다. 각 입자의 상호작용은 분자에 해밀토니안에서 고려되고 이 분자 해밀토니안을 컴퓨터에서 표현할 때 많은 메모리와 계산량을 필요 하게 된다. 그래서 현재의 고전적인 컴퓨터를 활용한 분자의 바닥상태 에너지 계산은 큰 분자에는 적용하기 어려웠다.

양자 컴퓨터는 최근에 떠오르고 있는 분야로 현재 많은 연구가 진행되고 있다. 양자 컴퓨터는 고전 컴퓨터와 다른 큐비트 즉, 양자 비트를 사용하여 고전 컴퓨터의 0과 1만을 나타내는 비트와 다르게 0상태와 1상태가 중첩되는 큐비트를 사용한다. 이 때문에 분자의 바닥 상태 에너지 계산에서 입자의 수가 증가하여 필요한 메모리가 2배로 증가할 때 양자 컴퓨터에서는 큐비트를 한 개 늘리면 계산할 수 있다. 고전적인 컴퓨터가 기하급수적으로 메모리 양이 증가할 때 양자 컴퓨터는 다항적인 큐비트 증가로 해결할 수 있다. 따라서 현재로 계산 불가능한 큰 분자도 양자 컴퓨터로는 계산이 가능하다. 양자 컴퓨터 알고리즘 Quantum Phase Estimation (QPE)는 양자 컴퓨터에서 유니터리 행렬의 고유값과 고유 상태를 계산하는 알고리즘으로 이를 이용하면 분자의 바닥 상태 에너지를 구할 수 있다. 하지만 QPE를 구현하기 위해서는 매우 정확하고 많은 수의 큐비트가 필요하다 알려져 있다. 현재의 양자 컴퓨터는 NISQ(Noisy Intermediate-Scale Quantum device) 수준에 있다고 말한다. NISQ는 양자 컴퓨터가 노이즈가 많고 중간 단계 수준의 큐비트을 가진 것을 의미한다. 현재의 양자 컴퓨터는 아직까지 노이즈가 많아 정확도가 부족하고 큐비트의 수도 수십 수백개로 아직 부족하기 때문에 QPE를 구현하기는 어렵다.

Variational Quantum Eigensolver (VQE)는 이런 NISQ 수준의 양자 컴퓨터를 사용하여 고유값 문제를 풀기 위한 알고리즘으로 양자 컴퓨터와 고전컴퓨터를 모두 사용한다. VQE는 variational 원리를 기반으로 파라메터로 조절할 수 있는 시험 파동함수를 구성하여 분자 해밀토니안의 기댓값을 얻는다. 이 기댓값이 일정한 값으로 수렴할 때까지 파라메터를 조절해 가며 이를 반복하여 분자의 바닥 상태 에너지의 상한을 얻는 알고리즘이다. 이 과정에서 분자 해밀토니안과 시험 파동함수를 양자 회로로 바꾸고 기댓값을 얻는 과정은 양자 컴퓨터로 진행하고 시험 파동함수의 파라메터를 조절하는 최적화 과정은 고전 컴퓨터로 진행한다. VQE는 QPE와 다르게 많은 수의 큐비트가 필요하지 않고 현재의 양자 컴퓨터에선 어려운 최적화를 고전적인 컴퓨터로 계산하기 때문에 NISQ 시대에서 양자 컴퓨터를 상용할 수 있을 거라 많은 기대를 받고 있다. 하지만 현재의 양자 컴퓨터는 너무 많은 오류를 가지고 있어 회로의 깊이(circuit depth)가 깊어짐에 따라 정확도가 많이 줄어들고 사용할 수 있는 큐빗의 수도 제한되어 있어 매우 큰 분자를 계산하기에는 부족하다.

따라서 이를 해결하기 위한 다양한 방법 중에 Fragment Molecular Orbital method based Variational Quantum Eigensolver (FMO/VQE) 방법이 있다. FMO/VQE는 현재의 양자 컴퓨터의 한계로 인한 VQE의 제한을 개선하기 위해서 양자 화학 방법인 FMO 방법을 VQE에 적용한 알고리즘으로써 Hocheol Lim, et al. 에서 처음 고안되었다. FMO 방법은 전체의 시스템을 작은 조각들로 나누어서 전체 분자의 바닥상태 에너지를 근사하는 방법으로 작은 조각들 (monomer)과 작은 조각들의 쌍(dimer)의 바닥 상태 에너지를 구하여 이를 이용하여 전체 분자의 바닥상태 에너지를 근사한다. 분자를 작은 조각으로 나누기 때문에 전체 계산에서 고려해야 할 시스템의 최대 크기를 줄일 수 있고 이를 VQE에 적용하면 필요한 큐빗수를 줄이고 양자 회로의 깊이를 줄일 수 있다. 따라서 FMO/VQE를 통해서 가까운 시일 내에 양자 컴퓨터를 실활용할 수 있는 방안으로 기대된다.

본서에서는 FMO/VQE를 활용하여 이차전지의 양극재로 사용되는 대표적인 물질 LiCoO2의 바닥 상태 에너지를 계산하였고 이를 고전적인 컴퓨터 계산과 비교하였다. 또한 일반적인 VQE와 FMO/VQE의 정확도를 비교하여 FMO/VQE의 NISQ 시대에서 사용가능성을 확인한다.

**2.Method.**

**2.1 Lithium-ion battery**

리튬이온 배터리는 다양한 산업에서 사용하고 있는 2차전지중 하나이다. 리튬이온 배터리는 크게 양극재, 음극재, 전해질로 구성되며, 여기서 양극재로 사용되는 것이 리튬 산화물이다. 이 양극재는 층상구조에 리튬이온이 달려있는 산화물을 사용한다. 산화물에서 리튬이온이 산화되는 정도에따라 에너지가 충전되게 된다. 리튬은 전세계에 매장된 양이 제한되어있는것으로 알려져있다. 이에대한 해결책으로 많은 방법들이 제시되었고, 그중 하나의 해결책이 하나의 리튬이온당 충전되는 에너지를 최대화하고자 하는 접근이다. 이는 리튬의 매장량과 관련해서도, 또 배터리의 소형화와 관련해서도 매우 중요한 상황이다. 이 리튬 하나당 저장되는 에너지의 양을 계산해내기 위해서는, 분자의 바닥상태의 계산이 반드시 필요하다. 하지만, 이 계산은 고전적으로 이루어지고 있으며, 더 큰 분자나 혹은 더 다양한 조합들의 계산은 제한적인 상황이다. 따라서 이번 연구에서 LiCoO2 분자에 VQE 알고리즘을 적용한 결과를 보이고, 배터리 개발 분야에서 양자컴퓨터의 적용가능성을 제시한다.

라인, 도표, 텍스트, 그래프이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

표 배터리 작동 방식

라인, 도표, 패턴이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

그림

분자에 전압을걸어 전자를 공급 해주게되면(즉, 충전해주게 되면), 이온이 음극재 쪽으로 이동하게된다. 이렇게 충전이 된 상태에서 방전을 시키게되면, 아래의 그림처럼 음극재에 있던 이온이 다시 양극재로 결합되면서, 저항에 전류가 흐르게된다. 이때 리튬의 산화상태에 따라 분자구조의 평균적인 기하학적인 구조가 그림 () 와 같이 달라지게되고, 따라서 그 기하학적인 구조를 이용해, Bulk에서의 에너지를 추정 할 수 있다. 그 평균적인 산화물의 구조를 하나의 분자로 생각하는 Gas-Phase model 을 가정하여 분자의 에너지를 계산한다.

**2.2 VQE(Variational Quantum Eigensolver)**

텍스트, 스크린샷, 도표, 폰트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

그림 VQE Pipeline

VQE 알고리즘은 Peruzzo et al. [2]에 의해 처음 제안된 고유값 문제 해결 알고리즘으로, Variational Principle에 따라 Hilbert 공간에서 바닥 상태 에너지의 상한을 제공하는 에너지를 계산하는 방식으로 작동한다. VQE는 양자 컴퓨터에서 에너지를 측정하고 고전 컴퓨터에서 최적화를 수행하여, 시스템의 바닥 상태 에너지를 계산한다. 시스템의 에너지를 양자컴퓨터에서 측정하기 위해 Hamiltonian을 파울리게이트로 매핑하고, 임의의 양자상태를 표현하여 이를 양자 회로에 인코딩해야한다.

(1) Hamiltonian

분자의 에너지에 대응하는 Hamiltonian은 아래와 같은 Electronic Structure Hamiltonian으로 표현된다.

(여기서 는 i번째 전자의 위치벡터를 나타내고, 는 I번째 원자핵의 위치를 나타내고, 는 I번째 원자핵의 원자번호를 의미한다.) 이 Hamiltonian을 파울리 게이트로 매핑하기 위해 아래와같이 Fermionic Creation/annihilation operator를 통해 표현되는 Second Quantzied form 으로 기술한다.

여기서 Fermionic 연산자는 Jordan-Wigner mapping, Parity mapping, bravyi kitaev mapping 등의 방식을 이용해 파울리 게이트로 매핑할 수 있다. 이번 실험에서는 Parity mapping 방식을 사용할것이다. Parity mapping은 i번째 큐비트에 i번째 오비탈까지의 전자 점유에의한 Parity를 대응시켜 파울리 게이트를 통해 생성/소멸 연산자를 표현한다. 이때 분자의 -spin -spin 의 Parity를 이용하여 필요한 큐비트의 개수를 2개 줄일 수 있다. 매핑의 결과 헤밀토니안은 아래와 같은 파울리스트링()과 그 가중치 혹은 선형계수()를 통해 표현된다.

(2) Ansatz

임의의 양자상태를 표현하기 위해 각 basis에 대응되는 선형 계수를 파라미터로 하는 PQC(Parameterized Quantum Circuit)를 구성한다. Ansatz의 경우 그 성능을 평가하기 힘들고, 시스템에 따라 어떤 Ansatz가 더 좋은지 알 수 없는 선험적인 영역에 있다. 따라서, 이번 실험에서는 두가지의 Ansatz를 사용한다.

a) Two-Local (Efficient SU2) Ansatz

Single 큐비트의 양자상태는 bloch sphere상에서 2개의 임의의 각도에 대한 Rotation gate표현된다. Rotation Gate의 각도를 파라미터로하고, Multi qubit system 에서 큐비트가 갖는 성질인 Entanglement를 CNOT Gate를 이용해 표현하면, 임의의 Multi Qubit System에서의 양자상태를 파라미터를 이용하여 표현 할 수 있다.

라인, 스크린샷, 텍스트, 폰트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

그림 2 3개의 큐비트 에서의 Efficient SU2 Ansatz 예시.

Two\_Local Ansatz의 구성에는 헤밀토니안을 통한 해석이 들어가있지 않다. 이는 하드웨어에서 표현되는 임의의 양자상태에대한 표현이고, Hardware Efficient 하다.

b) UCCSD Ansatz

2nd quantize를 통해 헤밀토니안 연산자를 시스템의 분자오비탈을 Basis로 표현하였다. 결국 찾고자하는 상태는 헤밀토니안과 같은 Hilbert 공간상에 표현되므로, 같은 스핀오비탈을 Basis를 이용하면 해당 Hilbert 공간내의 임의의 양자상태를 표현 할 수 있다. 이러한 양자상태를 Coupled-Cluster Theory를 통해 표현하고, 2nd-order excitation 까지만 고려하고, 이를 Unitary로 표현한것이 UCCSD(Unitary Coupled Cluster Singles and Doubles) 이고, 그 형태는 아래와같다.

이는 생성/소멸 연산자를 통해 상태가 표현되게 되며, Jordan-Wigner mapping이나, Parity mapping을 통해 양자 회로에 인코딩 할 수 있다.

이렇게 구성된 양자 회로에 대해 Hamiltonian의 각 Pauli String에 대한 기댓값을 측정하여 시스템의 에너지를 계산한다. Ansatz의 파라미터를 최적화하여 에너지가 최소가 되도록 함으로써 바닥 상태 에너지의 상한의 최솟값을 찾는다. 결과적으로 그 최솟값이 시스템의 VQE알고리즘에서 계산된 바닥 상태 에너지에 해당한다.

**2.2 FMO(Fragmental Molecular orbital)**

원이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명도표, 라인, 그래프, 스크린샷이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

분자의 바닥상태 에너지의 계산에서 계산복잡도는 시스템의 크기의 지수적인 스케일을 갖게되므로, 일반적으로 큰 시스템을 다루는것은 매우 어렵다. 따라서 큰 시스템을 몇개의 반복되는 구조인 Fragment로 나눠서 계산하는 방식이 제안되었다[kitaura], FMO method의 기본 아이디어는 전체 분자의 시스템을 작은 조각으로 나누고 모든 조각의 에너지와 그 조각들의 모든 쌍의 에너지를 이용하여 전체 시스템의 에너지를 얻는 것이다. 이때 조각들 하나를 모노머 (monomer)라 하고 두 조각들의 쌍을 다이머 (dimer)라 한다. 보통, 벤젠고리, 등 특정한 안정적인 구조를 하나의 Fragment로 하여 계산을 수행한다. 하지만, 이번 연구에서는 하나의 원자를 하나의 Fragment로 하여 계산을 수행하게된다. monomer와 Dimer의 에너지는 앞서 정의한 Electronic Structure Hamiltonian을 이용해 계산한다.

이렇게 계산된 monomer와 Dimer의 에너지를 이용하여 중복되는 Interaction들을 고려하여 아래와 같이 계산하면 분자의 에너지를 계산할 수 있다.

**2.3 FMO/VQE (Fragment molecular orbital-based Varational Quantum Eigensolver)**

FMO/VQE는 Hochel Lim et al. 에서 처음 소개된 알고리즘으로 VQE 알고리즘에 FMO method를 접목시킨 방법이다. VQE 알고리즘에서는 시스템을 표현할때 분자 스핀오비탈을 basis로 해서 표현하므로, 분자의 스핀오비탈 개수만큼의 큐비트를 필요로 한다. 하지만, 현재 큐비트의 개수는 한계가 있으므로, 기존의 VQE 알고리즘에서는 시뮬레이션 할 수있는 분자의 수가 제한적이다. 하지만 기존의 VQE알고리즘에 FMO Method를 접목하게되면, 계산을 병렬적으로 진행하며, 총 시스템을 조각들로 나누어서 시뮬레이션 하므로 한번의 계산에서 필요한 큐비트의 개수를 줄일 수 있다. 큐비트의 개수는 시스템에서 고려해야할 스핀오비탈 개수와 같다(Parity mapper를 사용하게되면 2개 줄어든다). 이때 결합에 관여할 확률이 적은 Core오비탈을 따로 상수로써 계산하고, 각 원자의 Valence오비탈 만을 고려하는 Freeze\_core 방식을 사용하면 기존의 VQE계산에서 필요한 큐비트의 개수는 아래와같다.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| atom | Orbital representation | Number of Valence orbital | Number of Valence electron |
|  |  | 2 | 1 |
|  |  | 6 | 8 |
|  |  | 10 | 7 |

따라서 VQE 계산의 필요한 스핀오비탈의 개수는 산소는 2개임을 고려하여 24개이다. 여기에 Parity mapper를 사용하게되면, 계산에 필요한 큐비트를 2개 줄일 수 있으므로, 이 시스템을 기존의 VQE를 통해 해결하기 위해서는 22개의 큐비트가 필요하다.   
여기에 각 원자를 Fragment로 하는 FMO 방식을 적용해보자. 즉, 4개의 monomer 가 만들어지고, 6개의 dimer 시스템을 계산해야한다. 각 계산에서 필요한 스핀오비탈의 개수는 아래와같다.(조성이 같은 Configuration의 경우 한개만 표시함.)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Configuration | Number of Valence orbital | Number of Valence electron |
| Monomer |  | 2 | 1 |
|  | 6 | 4 |
|  | 10 | 7 |
| Dimer |  | 6 | 5 |
|  | 12 | 8 |
|  | 12 | 8 |
|  | 16 | 11 |

따라서 계산에서 최대 필요한 큐비트의 개수는 14개이다(using Parity mapper). FMO 방식을 적용함으로 인해서 계산에 필요한 큐비트의 개수를 8개 줄일 수 있다. 나아가 이 방식의 포텐셜은 시스템이 더욱 커질때에 있다. 최근 많이 사용되는 분자에 Ni, Mn 등을 첨가한 더 큰 분자를 시뮬레이션할때, 기존의 VQE 에서는 해당 원자의 최외곽 스핀오비탈 개수 만큼의 큐비트를 더 필요로 하게된다. 하지만, FMO/VQE에서는 시스템의 크기의 증가가 Fragment의 개수의 증가로 이어지게되므로, 같은 개수의 큐비트를 사용해서 더 큰 분자의 에너지를 계산하는것이 가능하다.

**결과**

분자는 총 50개의 분자 스핀오비탈을 갖는 시스템으로, 일반적으로 이를 양자컴퓨터에서 계산하기위한과정에서, 분자의 스핀오비탈이 큐비트에 대응되게 되므로, 총 50개의 큐비트가 필요하다. 50개의 큐비트 시스템은 Simulater로는 유의미한 계산내에 해결할 수 없는 계산량이고, 실제 하드웨어를 사용하기에는, 그 회로의 깊이가 매우 깊어 지금의 Noisy한 하드웨어에서는 문제를 해결할 수 없다. 따라서, 문제 해결에 필요한 큐비트의 개수를 줄이기 위한 많은 노력들이 있었고, 그중 잘 알려진 “ActiveCoreTransformer” 와 “Parity mapper”를 사용하면 22개의 큐비트만을 사용하여 비슷한 정밀도의 값을 얻을 수 있다. 하지만, 이또한 시스템이 커질때, 즉 더 많은 원자들을 고려해야할때, 각 원자들의 Valence 오비탈의 스핀오비탈 개수만큼 필요한 큐비트 수가 증가하게된다. 따라서 우리는 여기에 FMO 방식을 적용하여 최대 14개의 큐비트만을 사용하여 같은 정밀도의 계산을 하였고, 이 방식은, 비슷한 크기의 원자가 추가될때 더 많은 큐비트 수를 필요로 하지 않게 된다.

**4.1 Fragment Energy Calc.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| [Li-O]  (x=1) | | Optimizer | | |
| COBYLA | SPSA | L-BFGS-B |
| Ansatz | UCCSD | 텍스트, 그래프, 스크린샷, 라인이(가) 표시된 사진  자동 생성된 설명 | 텍스트, 그래프, 스크린샷, 라인이(가) 표시된 사진  자동 생성된 설명 | 텍스트, 그래프, 라인, 스크린샷이(가) 표시된 사진  자동 생성된 설명 |
| -82.2364 | -82.2543 | -82.2573 |
| Two\_Local  (Efficient SU2) | 텍스트, 그래프, 라인, 도표이(가) 표시된 사진  자동 생성된 설명 | 텍스트, 그래프, 라인, 스크린샷이(가) 표시된 사진  자동 생성된 설명 | 텍스트, 라인, 그래프, 스크린샷이(가) 표시된 사진  자동 생성된 설명 |
| -82.0798 | -82.0858 | -82.2572 |

그림 Fragment 에서의 에너지 계산(Iteration 에 따른 에너지)

텍스트, 스크린샷, 번호, 폰트이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

표 하나의 산화상태 에서 Fragment의 에너지

VQE의 성능에 영향을 주는 요인 중 Ansatz와 Optimizer는, 그 성능을 예상할 수 없다. 시스템의 성격에따라, 더 좋은 성능을 보여주는 Ansatz와 Optimizer를 특정 할 수 없는것이다. 따라서 fragment의 계산에서, 가장 보편적인 Ansatz 2개(UCCSD, Two-Local(Efficient-SU2))와 VQE분야에서 좋은 성능을 보인다고 알려진, 3개의Optimizer(COBYLA, SPSA, L-BFGS-B)를 사용하여 총 6번의 계산을 진행하고, 그중 가장 낮은 수렴값을 해당 Fragment의 바닥상태 에너지로 사용할것이다. 그림 2에서는 O-Li의 Dimer의 계산결과를 나타내었다. 6번의 계산중 UCCSD Ansatz와 L-BFGS-B Optimizer를 사용한 결과가 가장 낮은 수렴값을 보여주었고, 이후 계산에서의 O-Li Fragment의 에너지는 그 값을 사용할것이다. 나머지 Fragment에서도 마찬가지로 계산을 수행한 결과가 표1 이다.

**4.1 Molecular Energy Calc.**

FMO 방식 에서 Fragment의 에너지를 이용해 분자의 에너지를 계산하는 방식을 이용하여 분자의 에너지를 계산 할 수 있다.

텍스트, 폰트, 스크린샷, 번호이(가) 표시된 사진

자동 생성된 설명

**Conclusions**

본 연구에서 제안하는 양자알고리즘 FMO/VQE을 통해, 분자에서 고전적인 시뮬레이터와 비교하여 99.989%의 정확도로 분자의 바닥상태 에너지를 계산할 수 있었다. 이 결과는 앞으로의 신약 합성과 신소재 개발에 FMO/VQE 방식의 적용 가능성을 말해준다. 고전적인 컴퓨팅 방식으로는 신약 합성과 신소재 개발에 필요한 복잡한 분자의 경우 계산이 불가능하다.

본 연구에서 제안하는 FMO/VQE알고리즘은 FMO 방식을 통해 계산에 필요로 하는 큐비트 수를 줄일수 있게 한다.이는 계산하기 힘든 분자를 VQE를 이용하여 양자컴퓨터를 통해 해결할 수 있도록 한다. 이러한 결과는 복잡한 분자의 계산이 필요한 신약 합성과 신소재 개발분야에 FMO/VQE알고리즘이 새로운 패러다임이 될 수 있음을 보여준다.

**Reference**

[1] Hocheol Lim, et al., Fragment molecular orbital-based variational quantum eigensolver for quantum chemistry in the age of quantum computing, Scientific Reports 14, 2422 (2024)

[2] Peruzzo A., et al., A variational eigenvalue solver on a photonic quantum processor, Nature Communications 5, 4213 (2014).

[3] Jules Tilly, et al. The Variational Quantum Eigensolver: A review of methods and best practices, Physic Reports 986, 1-12 (2022)

[4] J.T.Hertz et al. Magnetism and structure of and comparison to , Department of Chemistry, Princeton University, DOI: 10.1103/PhysRevB.77.075119

[5] Kazuo Kitaura, et al., Fragment molecular orbital method: an approximate computational method for large molecules, Chemical Physics Letters 313, 701-706 (1999)

[6] Dmitri G. Fedorov, Kazuo Kitaura, Coupled-cluster theory based upon the fragment molecular-orbital method, The Journal of Chemical Physics 123, 134103 (2005)

[7] Stewart, Robert F. (1 January 1970). "Small Gaussian Expansions of Slater‐Type Orbitals". *The Journal of Chemical Physics*. **52** (1): 431–438. [doi](https://en.wikipedia.org/wiki/Doi_(identifier)):[10.1063/1.1672702](https://doi.org/10.1063%2F1.1672702).

**Acknowledgment**

This work is supported by the Basic Science Research Program through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Ministry of Education, Science and Technology (NRF2022R1F1A1064459) and Creation of the Quantum Information Science R&D Ecosystem (Grant No. 2022M3H3A106307411) through the National Research Foundation of Korea (NRF) funded by the Korean government (Ministry of Science and ICT).